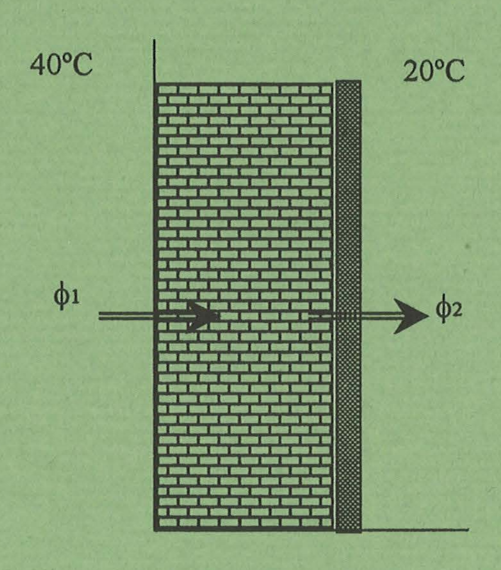
PROBLEMAS DE TEORÍAS TERMOLÓGICAS PRE-TERMODINÁMICAS

por

MERCEDES GONZÁLEZ REDONDO
Mª DOLORES REDONDO ALVARADO



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3 12-03

PROBLEMAS DE
TEORÍAS TERMOLÓGICAS PRE-TERMODINÁMICAS

por

MERCEDES GONZÁLEZ REDONDO
Mª DOLORES REDONDO ALVARADO

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3 12-03

C U A D E R N O S
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA

0 VARIOS
1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN

NUEVA NUMERACIÓN

3 Área
12 Autor
03 Ordinal de cuaderno (del autor)

Problemas de teorías termológicas pre-termodinámicas

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Composición y maquetación: Nadezhda Vasileva Nicheva
CUADERNO 47.03 / 3-12-03
ISBN: 84-9728-143-8
Depósito Legal: M-2599-2005

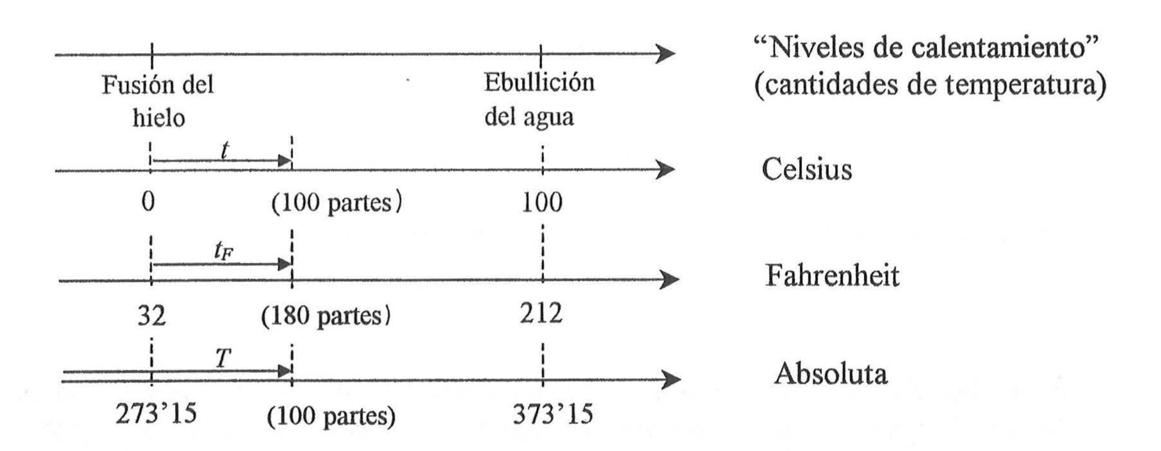
ÍNDICE

1. TERMOMETRÍA

1. a) Obtener las relaciones que existen entre las lecturas de temperaturas en las escalas Celsius, Fahrenheit y Absoluta.

b) La escala Rankine es una escala termodinámica (a partir del cero absoluto) con el mismo "tamaño" de grado que la Fahrenheit. ¿Cómo se relacionan sus medidas con las relativas a la escala Absoluta?

a) Teniendo en cuenta el *concepto de temperatura ("nivel de calentamiento")* puede hacerse la siguiente representación:



donde se han designado por t, t_F y T las temperaturas en grados Celsius, Fahrenheit y Absoluta, respectivamente.

La relación entre las unidades de las dos primeras escalas es:

$$\frac{u}{u_F} = \frac{180}{100} = \frac{9}{5}$$

1. $t_F = f(t)$

$$t_F = 32 + t_F = 32 + \frac{9}{5}t \tag{1}$$

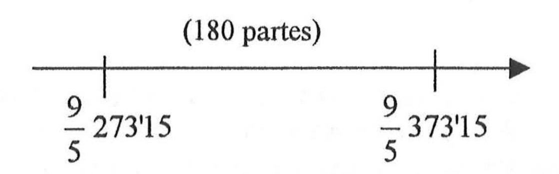
2. Directamente, $T = f(t)$

$$T = t + 273'15 \tag{2}$$

3. $T = f(t_F)$

$$T = \frac{5}{9}(t_F - 32) + 273'15 \Rightarrow \quad T = \frac{5}{9}t_F + 255'15 \tag{3}$$

b) **Escala Rankine**



Por tanto:

$$T_R = \frac{9}{5}T \tag{4}$$

Las relaciones con las lecturas en escalas **Celsius** y **Fahrenheit** se obtienen sin más que sustituir T por sus expresiones en función de t y t_F, respectivamente:

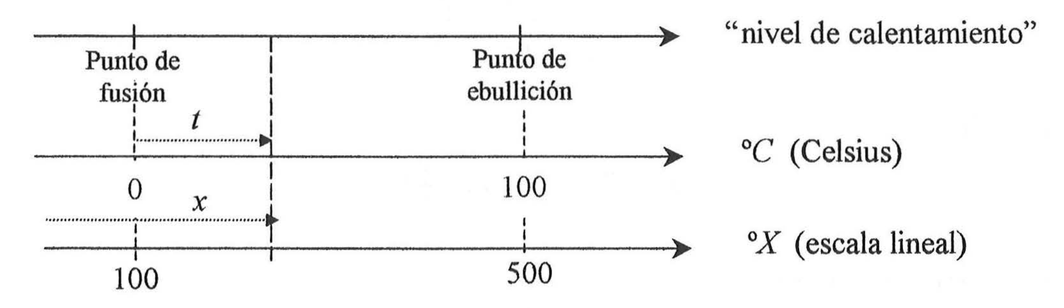
$$T_R = \frac{9}{5}(t + 273'15) \tag{5}$$

$$T_R = t_F + 459'67 \tag{6}$$

Nota: Las ecuaciones (1) a (6) son igualdades entre medidas (números reales).

2. Se supone una escala lineal de temperaturas (°X) de forma que los puntos de fusión del hielo y de ebullición del agua a 1 atm sean 100 °X y 500 °X, respectivamente. Obténgase la relación existente entre las temperaturas Celsius y las medidas en dicha escala.

La idea de *temperatura ("nivel de calentamiento")* permite hacer la siguiente representación

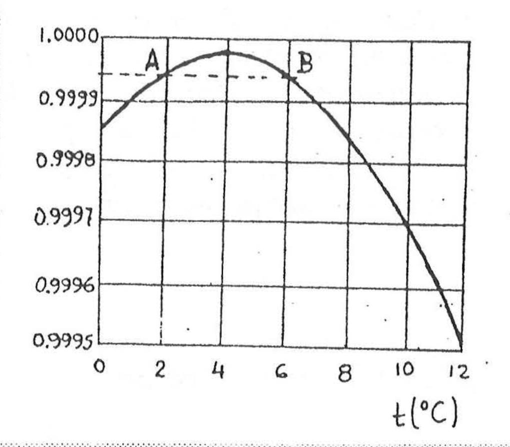


De la relación entre las medidas t y x de la temperatura en las escalas lineales consideradas, se obtiene:

$$\frac{100-0}{t} = \frac{500-100}{x-100} \Rightarrow \overline{\underline{t = \frac{1}{4}x - 25}} \text{ , o bien, } \overline{\underline{x = 4t + 100}}$$

3. Un termómetro de agua -tubo de vidrio con agua- se usa para determinar si dos sistemas separados se encuentran en equilibrio térmico. La densidad del agua (representada en la figura adjunta) es el parámetro termométrico.

Supóngase que, cuando el termómetro se inserta en cada uno de los sistemas, el agua se eleva a la misma altura, correspondiente a una densidad de 0.999945 g.cm⁻³.



a) ¿Están los sistemas necesariamente en equilibrio térmico?
b) ¿Cambiaría la altura del agua en el termómetro si los sistemas se pusieran en contacto térmico?
c) Si se produjera un cambio en la altura del agua ¿aumentaría o disminuiría ésta?
d) ¿Qué conclusión extraería de la reflexión sobre el problema?

a) Los sistemas no estarían necesariamente en equilibrio térmico, ya que a una ρ determinada pueden corresponder dos temperaturas distintas.

b) 1. Hipótesis de sistemas a *idéntica temperatura*: no se modifican ni "ρ" ni "h".

2. Hipótesis de sistemas a *diferente temperatura*: al ponerlos en contacto evolucionarían hacia una temperatura intermedia y, en consecuencia, cambiaría la altura al variar la densidad.

c) El sistema A, y también el B, aumentarían su densidad; es decir:

$$\left.\begin{matrix}\rho_x > \rho_A \\ \rho_x > \rho_B\end{matrix}\right\}\rho_x \text{ aumenta} \Rightarrow V \text{ disminuye} \Rightarrow h \text{ disminuye}$$

d) La densidad del agua no es una buena propiedad termométrica (al menos para temperaturas en torno a los 4°C). El "*termómetro de agua*" es un mal termómetro.

4. Una soldadura de un par termoeléctrico de dos metales diferentes se mantiene en hielo fundente mientras que la otra se introduce en un baño de arena que incluye un buen termómetro. Cuando el baño de arena tiene una temperatura de 100°C la fuerza electromotriz es de 1'5 mV y cuando la temperatura es de 200 °C la fuerza electromotriz es de 2'0 mV ¿Cuál sería la fuerza electromotriz entre las soldaduras si la diferencia de temperaturas fuese de 150°C?

La *ecuación termométrica* usual de un par termoeléctrico es:

$$\boxed{\varepsilon = a + bt + ct^2}$$

La *soldadura de referencia* se encuentra en *hielo fundente*, es decir, que para:

$$t = 0 \ , \quad \varepsilon = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \ \Rightarrow \quad \varepsilon = bt + ct^2$$

Imponiendo las dos condiciones explícitas del enunciado se obtienen los valores de los parámetros "b" y "c":

$$1'5 = b \, . \, 100 + c \, . \, 10^4$$

$$2 = b \, . \, 200 + c \, . \, 4 \, . \, 10^4$$

$$b = 2 \, . \, 10^{-2}$$

$$c = - \, 0'5 \, . \, 10^{-4}$$

Por tanto:

$$\varepsilon = 2.10^{-2} \, t - 0{,}5.10^{-4} \, t^2$$

y, haciendo $t = 150$, resulta:

$$\varepsilon = 2 \, . \, 10^{-2} \, . \, 150 - 0'5 \, . \, 10^{-4} \, . \, 150^2 = 1'875 \, mV$$

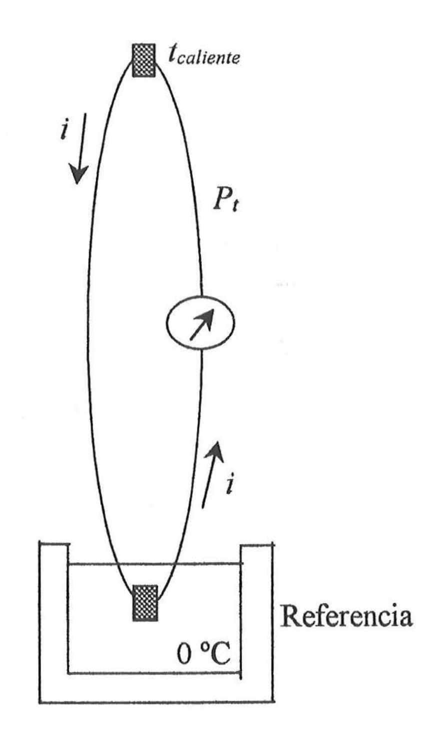
5. En la tabla adjunta se expresan las fuerzas electromotrices termoeléctricas (en mV) de algunos materiales respecto al platino para dos temperaturas de la soldadura caliente (200 y 400 °C) cuando la soldadura de referencia se mantiene a 0 °C.

t (°C)	*Cromo*	*Aluminio*	*Cobre*	*Hierro*	*Constantán*	*Níquel*
200	*5'96*	*- 2'17*	*1'83*	*3'54*	*- 7'45*	*- 3'10*
400	*12'75*	*- 3'64*	*4'68*	*5'88*	*- 16'19*	*- 5'45*

El signo de la fuerza electromotriz se considera positivo cuando produce la corriente en el sentido del elemento al platino en la soldadura de referencia y negativa en caso contrario.
Se pide:
1°. Si se dispone de pares Cu-constantán, Fe-constantán, Cr-Al, Fe-Cu, Al-Ni para los cuales puede suponerse que la dependencia de la fuerza electromotriz con la temperatura es cuadrática en el dominio de temperaturas 0-400 °C ¿Cuál debe utilizarse para obtener la mayor sensibilidad en la medida?
2°. ¿Qué par termoeléctrico proporciona una sensibilidad lo más uniforme posible para el rango de temperaturas considerado?

1°. La *ecuación termométrica* de los pares citados para $0 \le t \le 400°C$ es:

$$\varepsilon = \alpha + \beta t + \gamma t^2$$



Teniendo en cuenta la condición de la *temperatura de referencia*:

$$t = 0\,,\, \varepsilon = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \beta t + \gamma t^2$$

Aplicando esta ecuación reducida (dos parámetros) a los datos de la tabla pueden obtenerse los valores de los parámetros correspondientes a cada uno de los pares termoeléctricos:

$$\varepsilon = \beta.200 + \gamma.4.10^4$$

$$\varepsilon = \beta.400 + \gamma.16.10^4$$

de donde se obtienen:

$$\beta = \frac{4\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{400} \quad ; \quad \gamma = \frac{\varepsilon_2 - 2\varepsilon_1}{8.10^4}$$

La *sensibilidad o potencia termoeléctrica* se define por:

$$P = \frac{d\varepsilon}{dt} \;\Rightarrow\; P = \beta + 2\gamma t$$

Con carácter general se acepta la hipótesis del comportamiento algebraico relativo de los materiales entre sí a partir de los datos referidos al platino.

Cálculo para el par Cu-constantán:

$$\varepsilon_1 = 1'83 - (-7'45) = 9'28\ mV$$

$$\varepsilon_2 = 4'68 - (-16'19) = 20'87\ mV$$

$$\beta = 4'06\ .10^{-2}\ mV.^{o}C^{-1}$$

$$\gamma = 2'89\ .10^{-5}\ mV.^{o}C^{-2}$$

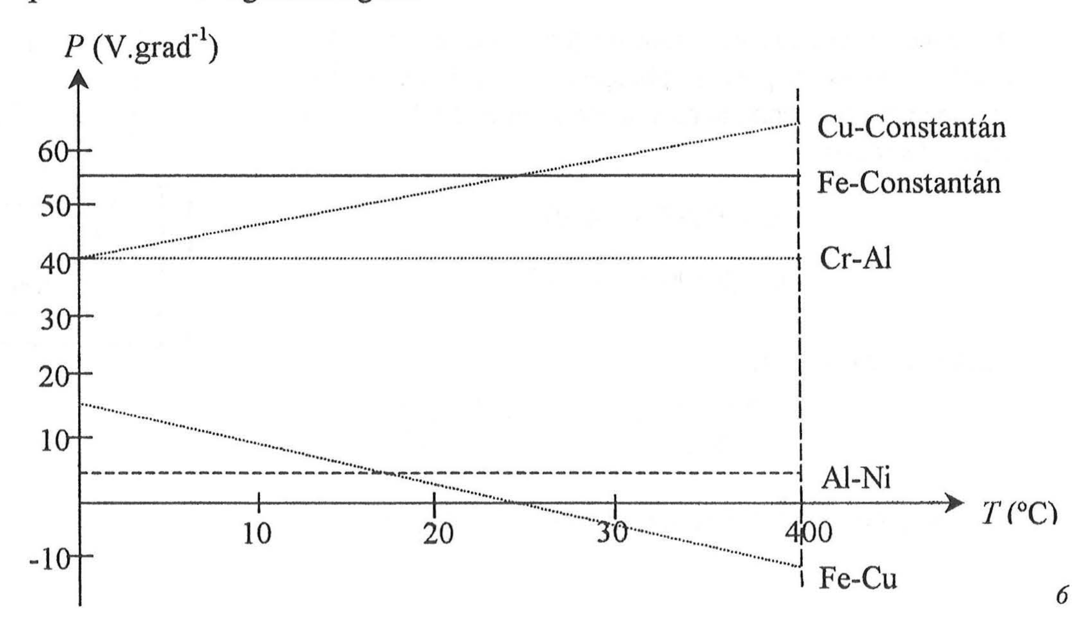
$$t_1 = 0\,^{o}C \;\Rightarrow\; P_1 = 40'6\ \mu V.^{o}C^{-1}$$

$$t_2 = 400\,^{o}C \;\Rightarrow\; P_2 = 63'7\ \mu V.^{o}C^{-1}$$

Procediendo análogamente para los restantes pares, se resumen los resultados en la tabla siguiente:

	Cu-constantán	*Fe-constantán*	*Cr-Al*	*Fe-Cu*	*Al-Ni*
$\beta\ (mV.^{o}C^{-1})$	$4'06.10^{-2}$	$5'47.10^{-2}$	$4'03.10^{-2}$	$1'41.10^{-2}$	$0'48.10^{-2}$
$\gamma\ (mV.^{o}C^{-2})$	$2'89.10^{-5}$	$1'13.10^{-6}$	$1'63.10^{-6}$	$-2'78.10^{-5}$	$-6'25.10^{-7}$
$P_1(\mu V.^{o}C^{-1})$	40'6	54'7	40'3	14'1	4'8
$P_2(\mu V.^{o}C^{-1})$	63'7	55'6	41'6	-8'1	4'4

y se representan en la siguiente figura.



De la representación puede deducirse que los pares de mayor sensibilidad son:

$0 - 250\,°C$: Fe-constantán

$250 - 400\,°C$: Cu-constantán

donde el valor $\approx 250\,°C$ se obtiene de la figura (puede calcularse algebraicamente para mejor "exactitud").

2°. Mayor uniformidad implica menor pendiente de la recta (2γ), lo que implica menor valor de γ. Por tanto: Al-Ni.

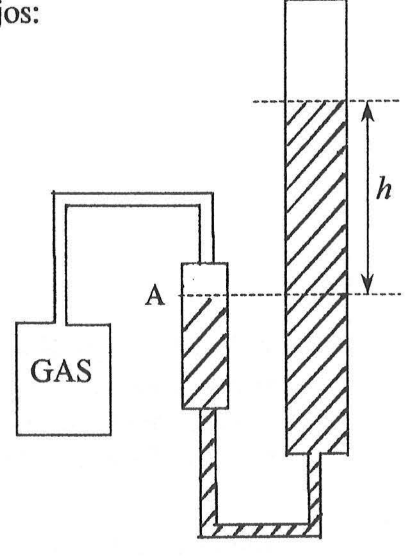
En la práctica se utilizaría el Fe-constantán, de uniformidad análoga por su mayor sensibilidad.

6. La presión de un termómetro de gas a volumen constante es de 0'400 atm en el punto de fusión del hielo y de 0'546 atm en el punto de vaporización del agua. Se pide:
a) Calcular la temperatura del agua cuando la presión es de 0'100 atm.
b) Calcular la presión en el punto de ebullición del azufre (444'6 °C).

La *ecuación termométrica* es:

$$t = ap + b$$

Las constantes "a" y "b" se determinan mediante dos puntos fijos:



$t = 0\,°C,\ p = 0{,}4\ atm \Rightarrow 0 = 0{,}4\,a + b$

$t = 100\,°C,\ p = 0'546\ atm \Rightarrow 100 = 0'546\,a + b$

De estas ecuaciones se deducen los valores

$$a = 685\ ;\ b = -274$$

Por tanto:

$$t = 685\,p - 274$$

a) Para $p = 0'1 \Rightarrow t = 68'5 - 274 = -205'5\,°C$

b) Para $t = 444'6 \Rightarrow p = \dfrac{t + 274}{685} = 1'05\ atm$

7. Un termómetro de gas a volumen constante se encuentra a una presión de 30 mm de Hg cuando se aplica a una temperatura de 373 K.
a) ¿Cuál es su presión p_3 en el punto triple del agua?
b) ¿Qué temperatura corresponde a una presión de 0'175 mm Hg?

Se acepta la hipótesis de *gas ideal*. En este caso:

$$pV = nRT \quad \Rightarrow \quad T = \frac{V}{nR}\,p = a\,p$$

Se necesitaría un *"punto fijo"* para calibrar el termómetro

$$T = 373\,K \qquad p = 30\,mm\,Hg$$

$$a = \frac{T}{p} = \frac{373}{30} = 12'43\,\frac{K}{mmHg} \quad \Rightarrow \quad T = 12'43\,p$$

a) $T_3 = 273'16 = 12'43\,p_3 \Rightarrow p_3 = 21'98\,mm\,Hg$

b) $T = 12'43\ .\,0'175 = 2'18\,K\ ;\ t \approx -271\,°C$

8. Un par termoeléctrico, de potencia termoeléctrica constante en el intervalo de temperaturas utilizado, P = 92.10^6 V/ °C, y de resistencia R = 10 Ω está conectado a un galvanómetro cuya resistencia interna es r = 120 Ω.
Calcúlese la intensidad de corriente que marcará el galvanómetro cuando se introduce una de las soldaduras en vapor de agua a presión normal y la otra en hielo fundente.

$$P = \frac{dE}{dt}\ ;\ E = \int_{t_1}^{t_2} P\,dt = P(t_2 - t_1)$$

$$E = 92\ .\,10^6\ (100 - 0) = 0'0092\ V = 9'2\ mV$$

$$I = \frac{E}{R+r} = \frac{92.10^{-4}}{10+120} = 0'71.10^{-4}\ A = 0'071\,mA$$

9. El calor específico molar de un determinado gas se expresa en cal/mol.K mediante la ecuación $c_p = 3'38 + 18'04\ .\ 10^3\ T$, siendo T la temperatura del gas en K.
Obténgase la expresión de c_p si se utilizan las siguientes escalas de temperaturas:
a) °C, Celsius ; b) °F, Fahrenheit ; c) °R, Réamur

Simbólicamente, por el *Postulado general de homogeneidad de las ecuaciones físicas*, la expresión dada puede escribirse de la forma:

$$c_p\left(\frac{cal}{mol\cdot K}\right)=3{,}38\left(\frac{cal}{mol\cdot K}\right)+18{,}04\cdot 10^{-3}\left(\frac{cal}{mol\cdot K}\right)T$$

donde T representa "medidas" (números reales) de temperatura en la escala Kelvin.

a) El cambio de la "escala Kelvin" por la "escala Celsius" invita a proceder de la forma siguiente:

$$c_p\left(\frac{cal}{mol.K}\right)\left(\frac{K}{°C}\right)=3{,}38\left(\frac{cal}{mol.K}\right)\left(\frac{K}{°C}\right)+18{,}04.10^{-3}\left(\frac{cal}{mol.K}\right)\left(\frac{K}{°C}\right)(t+273{,}15)$$

donde t representa *"medidas"* (números reales) de temperatura en $°C$. Reagrupando las operaciones indicadas, resulta:

$$c_p\left(\frac{cal}{mol\cdot °C}\right)=(3{,}38+18{,}04.10^{-3}.273{,}15)\left(\frac{cal}{mol\cdot C}\right)+18{,}04.10^{-3}\left(\frac{cal}{mol.°C}\right)t$$

Efectuando las operaciones indicadas, se obtiene:

$$c_p = 8{,}305 + 18{,}04\ .\ 10^{3}\ t \quad ; \quad \text{midiendo } t \text{ en } °C$$

b) Análogamente:

$$c_p\left(\frac{cal}{mol.K}\right)\left(\frac{K}{9/5\ °F}\right)+18{,}04.10^{-3}\left(\frac{cal}{mol.K}\right)\left(\frac{K}{9/5\ °F}\right)\left[\frac{5}{9}(t_F-32)+273{,}15\right]$$

donde t_F son "medidas" (números reales) de temperatura en $°F$.

Efectuando operaciones, resulta:

$$c_p = 7{,}98 + 10{,}02\ .\ 10^{3}\ t_F \quad ; \quad \text{midiendo } t_F \text{ en } °F$$

c) Análogamente, se obtendría:

$$c_p = 3{,}37 + 10{,}02\ .\ 10^{3}\ t_R \quad ; \quad \text{midiendo } t_R \text{ en } °R$$

2. DILATACIÓN DE SÓLIDOS Y LÍQUIDOS

10. A 15 °C una varilla de hierro mide 50 cm y otra de estaño 49'98 cm. Se desea saber a qué temperatura ambas varillas miden los mismo.
(Coeficientes de dilatación lineal: $\alpha_{Fe} = 12.10^{-6}\ °C^{-1}$; $\alpha_{Sn} = 23.10^{-6}\ °C^{-1}$)

La ecuación general de la dilatación lineal de sólidos es

$$l_t = l_0(1+\alpha\Delta t)$$

donde l_0 representa la longitud a la temperatura de referencia que en el caso presente es de 15 °C.

Aplicando esta fórmula a las dos varillas, con la condición de igualdad de las respectivas longitudes a la temperatura t buscada, resulta:

$$50\,(1+12.10^{-6}\,\Delta t) = 49{,}98\,(1+23.10^{-6}\,\Delta t)$$

de donde se deduce:

$$\Delta t = 36{,}40\ °C \quad \Rightarrow \quad t = 36{,}40 + 15 = 51{,}4\ °C$$

11. Un anillo de acero de 75 mm de diámetro interior a 20 °C ha de ser calentado e introducido en un eje de latón de 75'05 mm de diámetro a 20 °C
a) ¿A qué temperatura ha de calentarse el anillo?
b) ¿A qué temperatura debería enfriarse el conjunto para que el anillo saliera él solo del eje?
($\alpha_{acero} = 1'2.10^{-5}\ °C^{-1}$; $\alpha_{latón} = 2\,.10^{-5}\ °C^{-1}$)

a) De la fórmula de la dilatación lineal de un cuerpo sólido:

$$l_t = l_0(1+\alpha\Delta t)$$

aplicada a la longitud de la circunferencia:

$$(\pi d)_t = (\pi d)_0(1+\alpha\ \Delta t) \Rightarrow d_t = d_0(1+\alpha\ \Delta t)$$

$$D_t = D_{20}\,[1 + (t-20)] \qquad D_t \geq 75'05\ mm$$

Considerando la hipótesis de la perfección geométrica de anillo y eje: D = 75'05

$$75{,}05 = 75\left(1 + 1{,}2 \cdot 10^{5} \cdot \Delta t\right) \Rightarrow \Delta t = \frac{0{,}5}{75 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-5}} = 55{,}5\,°C \;\Rightarrow\; t = 20 + 55{,}5 = 75{,}5\,°C$$

b) Los diámetros del eje y del interior del anillo habrían de ser iguales a la misma temperatura.

$$\text{Anillo}: \; D_t = D_{20}\,(1 + \alpha_{ac}\,\Delta t) \qquad (1)$$

$$\text{Eje}: \; d_t = d_{20}\,(1 + \alpha_{la}\,\Delta t) \qquad (2)$$

Estas ecuaciones resuelven el problema con las condiciones siguientes:

$$t = 20 + \Delta t \quad \text{y} \quad D_t = d_t$$

Dividiendo la ecuación (1) por la (2) resulta:

$$\frac{D_t}{d_t} = 1 = \frac{(1 + \alpha_{ac}\,\Delta t)\,D_{20}}{(1 + \alpha_{la}\,\Delta t)\,d_{20}}$$

$$\Delta t = \frac{d_{20} - D_{20}}{D_{20}\,\alpha_{ac} - d_{20}\,\alpha_{la}} = \frac{75{,}05 - 75}{75.1{,}2.10^{-5} - 7{,}55.2.10^{-5}} \approx -83\,°C$$

Por tanto:

$$t = 20 - 83 = -63\,°C$$

12. Un péndulo de latón de un reloj tiene un periodo de oscilación de 1'00 s a 16 °C de temperatura media en invierno. ¿Cuánto adelantará o atrasará el reloj cada día en verano si la temperatura media es de 26°C? ($\alpha_{latón} = 1{,}9.10^{-5}\,°C^{-1}$)

El *período de un péndulo* es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

y aplicando esta fórmula a las condiciones de invierno y verano resulta:

$$T_i = 2\pi\sqrt{\frac{l_i}{g}} \;\; ; \;\; T_v = 2\pi\sqrt{\frac{l_v}{g}}$$

de donde se deduce:

$$\frac{T_v}{T_i} = \sqrt{\frac{l_v}{l_i}} \quad \Rightarrow \quad T_v = \sqrt{\frac{l_v}{l_i}}\, T_i$$

Dado que, $l_v > l_i \Rightarrow T_v > T_i$, el reloj *atrasa* en verano.

$$l_v = l_i (1 + \alpha\, \Delta t) = l_i (1 + 1{,}9.10^{-5}.10) = 1{,}00019\ l_i$$

$$T_v = \sqrt{1{,}00019} \cdot 1 = 1{,}000095\ s$$

Por tanto, en cada oscilación atrasa 0'000095 s, y en un día:

Atraso diario $= 24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 0{,}000095 = 8{,}2\ s$

13. Una vasija de cinc ($\alpha = 2'9.10^{5}\ °C^{-1}$) de 10 l de capacidad está llena de mercurio a 100 °C. Posteriormente se enfría hasta 0 °C.
Calcúlese la masa de mercurio que debe añadirse para que la vasija quede completamente llena a 0 °C. .
(Coeficiente de dilatación cúbica del mercurio: K_{Hg} = $1'82.10^{-4}\ °C^{-1}$; densidad del mercurio a 0 °C: ρ_{Hg} = 13'6 g/cm³).

El cambio de volumen de la vasija se obtiene mediante la fórmula:

$$V_0 = V_{100}(1 + 3\alpha\ \Delta t)$$

$$\Delta t = -100°C; \quad V_0 = 10\left(1 - 3 \cdot 2{,}9 \cdot 10^{-5} \cdot 100\right) = 9{,}913\ l$$

Análogamente, el volumen del mercurio a *0*°C se obtiene de la expresión:

$$V_0^{'} = V_{100}^{'}(1 + K\ \Delta t)$$

$$V_0^{'} = 10\left(1 - 1{,}82 \cdot 10^{-4} \cdot 100\right) = 9{,}818\ l$$

El volumen del mercurio a 0 °C que deberá añadirse para enrasar la vasija será:

$$V_0 - V_0^{'} = 9{,}913 - 9{,}818 = 95\ cm^3$$

que, en masa, es:

$$m = V \cdot \rho = 95\ cm^3 \cdot 13{,}6\ g \cdot cm^{-3} = 1{,}292\ kg$$

14. Un recipiente abierto de acero de 10 l está lleno de un líquido a 0 °C. La temperatura aumenta de 0 a 40 °C. ¿Qué cantidad de líquido se saldrá del recipiente? ($\alpha_{acero} = 16..10^{-5}\,°C^{-1}$; $K_{líquido} = 1'5.10^{-3}\,°C^{-1}$)

El volumen del recipiente de acero a 40 °C es

$$V_{40} = V_0(1 + 3\alpha \cdot \Delta t) = 10\,(1 + 3 \cdot 1{,}1 \cdot 10^{-5} \cdot 40) = 10{,}0132\; l$$

y el volumen del líquido

$$V'_{40} = V_0(1 + K \cdot \Delta t) = 10\,(1 + 1{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 40) = 10{,}60\; l$$

El **volumen** del líquido que se derrama es

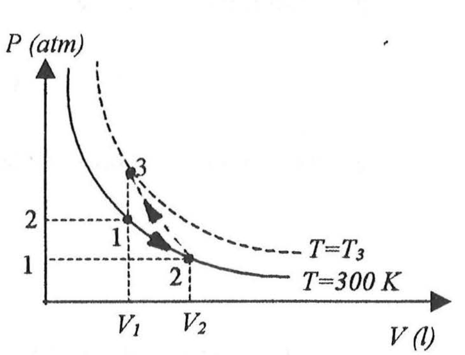
$$V = 10{,}6 - 0132 = 0{,}5868\; l = 586{,}8\; cm^3$$

Nota: la "cantidad de líquido sería más correcto expresarla según masa (cantidad de materia, independiente de la temperatura) pero no se ofrecen datos adecuados.

3. TEORÍA DE GASES

16. Un mol de un gas ideal está en un cilindro provisto de un pistón a una presión y una temperatura iniciales de 2 atm y 300 K. (R = 0,082 atm.l/mol.K)
a) ¿Cuál es el volumen inicial del gas?
b) Se deja expansionar el gas a temperatura constante hasta que la presión sea de 1 atm. ¿Cuál es el nuevo volumen?
c) El gas se comprime y calienta al mismo tiempo hasta que alcance su volumen original, siendo entonces su presión de 2,5 atm. ¿Qué temperatura se alcanza?

a) Estado "1": ecuación de estado de los gases ideales:



$$p\,V = n\,R\,T$$

Si se aplica a un mol *(n=1)* en el estado "1":

$$V_1 = \frac{RT_1}{p_1} = \frac{0{,}082 \cdot 300}{2} = 12{,}3\ l$$

b) Proceso , $1 \Rightarrow 2$ isotermo a *300 K,* hasta $p = 1\ atm;$

Aplicando la "ley de Boyle-Mariotte" para una *expansión isoterma:* $p_1 V_1 = p_2 V_2$

$$V_2 = \frac{p_1 V_1}{p_2} = \frac{2 \cdot 12{,}3}{1} = 24{,}6\ \ell$$

c) Estado **3**: ecuación de estado de los gases ideales en **3**.

$$p_3 V_3 = R\,T_3$$

$$T_3 = \frac{p_3 V_3}{R} = \frac{2{,}5 \cdot 12{,}3}{0{,}082} = 375\ K$$

17. Calcúlense las expresiones del trabajo de expansión de un gas perfecto cuando se realiza: a) a presión constante; b) a temperatura constante.

La expresión del trabajo elemental en la expansión de un gas y la ecuación de estado de los gases ideales son, respectivamente:

$$dW = p\,dV \quad ; \quad p\,V = n\,R\,T$$

a) p = cte

$$W=\int_1^2 p\,dV=p\int_1^2 dV=p(V_2-V_1)$$

b) T = cte

$$W=\int_1^2 \frac{nRT}{V}dV=nRT\int_1^2 \frac{dV}{V}=nRT\,ln\frac{V_2}{V_1}=p_1V_1\,ln\frac{V_2}{V_1}=p_2V_2\,ln\frac{V_2}{V_1}$$

O, también: $W=\ p_1V_1\ln\frac{p_1}{p_2}=p_2V_2\ln\frac{p_1}{p_2}$

18. a) Demuéstrese que el valor del coeficiente de dilatación cúbica de un gas perfecto a 0 °C es 1/273,15 y compárese con el valor experimental para el nitrógeno a 0 °C y 1 atm que es de 0,003676 °C^{-1}.
b) 14 g de nitrógeno ocupan 1 l a 127 °C. Calcúlese el coeficiente de compresibilidad isotermo, admitiendo un comportamiento ideal del gas.

a) Coeficiente de dilatación cúbica:

$$\gamma=\lim_{\substack{\Delta T\to 0\\ p=cte}}\frac{1}{V}\frac{\Delta V}{\Delta T}=\frac{1}{V}\left(\frac{\delta V}{\delta T}\right)_p$$

De la ecuación de estado de los gases ideales $pV = nRT \Rightarrow V=\frac{nRT}{p}$ y, sustituyendo en la ecuación anterior:

$$\gamma=\frac{1}{V}\frac{nR}{p}=\frac{nR}{nRT}=\frac{1}{T}\qquad\Rightarrow\qquad\gamma_o=\frac{1}{273,15}$$

Comparación:

$$\gamma_o=0,003661\,°C^{-1}\quad;\quad\gamma_{exp}=0,003676\,°\,C^{-1}$$

Si se considera como referencia el resultado experimental, el relativo sería:

$$\varepsilon=\frac{15}{3676}\approx 0,004\quad;\quad\varepsilon\approx 0,4\,\%$$

b) *Coeficiente de compresibilidad isotermo*:

$$k=\lim_{\substack{\Delta p\to 0\\ T=cte}}-\frac{1}{V}\frac{\Delta V}{\Delta p}=-\frac{1}{V}\left(\frac{\delta V}{\delta p}\right)_T$$

De manera análoga al caso anterior:

$$k = -\frac{p}{nRT}\left(-\frac{nRT}{p^2}\right) = \frac{1}{p}$$

En el caso presente:

$$pV = nRT = \frac{m}{M}RT = \frac{14}{28}RT = 0{,}5\,RT$$

$$p = \frac{0{,}5\,RT}{V} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}082 \cdot 400}{1} = 16{,}4\,atm$$

$$k = \frac{1}{p} = \frac{1}{16{,}4} = 0'061\,atm^{-1}$$

19. La ecuación de Clapeyron para los gases referida a un mol es p (v-b) = RT. Calcúlese el coeficiente de dilatación cúbica y el de compresibilidad para una sustancia que obedezca esta ecuación.

a) El coeficiente de dilatación cúbica (isobárico) viene determinado por la expresión:

$$\gamma = \frac{1}{V}\left(\frac{\delta V}{\delta T}\right)_p$$

Para un mol:

$$\gamma = \frac{1}{V}\left(\frac{\delta v}{\delta T}\right)_p$$

De la ecuación de Clapeyron:

$$v = \frac{RT}{p} + b = \frac{RT + b\,p}{p}$$

Obtenemos, por tanto:

$$\gamma = \frac{p}{RT + b\,p} \cdot \frac{R}{p} = \frac{1}{t + \frac{bp}{R}}$$

b) El coeficiente de compresibilidad (isotermo) se obtiene a partir de la expresión:

$$k = -\frac{1}{V}\left(\frac{\delta V}{\delta p}\right)_T$$

Para un mol:

$$k = -\frac{1}{v}\left(\frac{\delta v}{\delta p}\right)_T = -\frac{p}{RT + bp} \cdot \frac{bp - (RT + bp)}{p^2}$$

$$k = \frac{RT}{(RT + b\,p)\,p} = \frac{1}{\left(1 + \frac{b\,p}{RT}\right)p}$$

Nota: compárense los resultados con los del ejercicio anterior.

20. Una botella de acero de 10 l de capacidad tiene una llave que permite ponerla en comunicación con la atmósfera. La presión exterior es de 76 cm de Hg y se admite que la botella no se dilata. Se pide:
1º. Peso del aire contenido en la botella si está a 0ºC y 114 cm Hg.
2º. Presión del aire interior cuando se calienta hasta 100 ºC.
3º. Peso del aire que queda dentro cuando, estando en la situación anterior, se abre la llave.
4º. Presión del aire interior cuando finalmente se cierra la llave y se enfría a 0ºC.
La densidad del aire en condiciones normales es 1,293 g/l.

1º. El sistema termodinámico es el aire contenido en la botella.

El estado del sistema se caracteriza por $T = 0ºC$, $V = 10\ l$, $p = 114/76 = 1{,}5\ atm$.

La hipótesis usual para el aire en condiciones próximas a las normales es la de gas ideal, cuya ecuación de estado es $pV = nRT$. Por tanto:

$$n = \frac{p_1 V_1}{R T_1} = \frac{1{,}5.10}{0{,}082.273} = 0{,}67\ moles$$

Masa molar del aire:

$$M_{aire} = 22{,}4 \frac{l}{mol} 1{,}293 \frac{g}{l} = 28{,}96 \frac{g}{mol}$$

Peso del aire en la botella:

$$m = n \cdot M = 0{,}67\ mol \cdot 28{,}96 \frac{g}{mol} = 19{,}4\ g$$

2º. El calentamiento desde *0ºC* hasta *100ºC es un proceso* por el cual se parte del *estado*

inicial del sistema (apartado 1°) y se acaba en el *estado final* (apartado 2°) caracterizado por *T = 100°C, V = 10 l*, y, conocido ya, *n = 0'67 mol* ("cantidad" de materia del sistema).

Aplicando la ecuación de estado de los gases perfectos (ideales):

$$p_2 = \frac{n R T_2}{V_2} = \frac{0{,}67 . 0{,}082 . 373}{10} = 2{,}049 \, atm = 155{,}7 \, cm \, Hg$$

[Nota: desde la perspectiva del proceso, dado que la botella se considera indeformable, se trata de un calentamiento isóstero (a volumen constante) y puede aplicarse la 2ª ley de Gay-Lussac.]

$$\frac{p}{T} = \frac{p'}{T'} \quad \Rightarrow \quad p' = p \frac{T'}{T} = 114 \, \frac{373}{273} = 155{,}7 \, cm \, Hg$$

3° Se trata de "otro" sistema ("otra" cantidad de aire: la que queda dentro de la botella). El estado de este sistema se caracteriza por *V* = 10 *l, p* = 76 *cm Hg* (presión exterior = presión equilibrio) y, al principio, *T* = 100 *°C* (hipótesis "algo aventurada" dado la expansión del gas). En este estado;

$$n = \frac{p V}{R T} = \frac{1 . 10}{0{,}082 . 373} = 0{,}327 \, mol$$

$$m_{aire} = 0{,}327 \, mol \cdot 28{,}96 \frac{g}{m} = 9{,}47 \, g$$

4°. *Proceso de enfriamiento* del nuevo sistema una vez cerrada la llave (análogo a 2°):

$$p'' = p \frac{T''}{T} = 76 \frac{273}{373} = 55{,}6 \, cm \, Hg$$

4. CALORIMETRÍA

21. En un calorímetro sin pérdidas cuyo equivalente en agua es de 101 cal/grado y cuya temperatura inicial es de 20°C se echan 250 cm³ de agua a 40°C, 100 g de Fe a 98°C y 80 g de hielo fundente.
Calcúlese la temperatura de equilibrio.
Datos complementarios: L_h = 80 cal/g ; c_{agua} = 1 ; c_{Fe} = 0'109 cal/g.grad^{-1}

Las *temperaturas iniciales* conocidas, ordenadas de menor a mayor son:

Hielo (0 °C); calorímetro (20 °C); agua (40 °C); Hierro (98 °C)

Las *temperaturas posibles de equilibrio* son:

Hip. 1: 0 °C
Hip. 2: (0-20) °C
Hip. 3: 20 °C
Hip. 4: (20-40) °C
Hip. 5: 40 °C
Hip. 6: (40-98) °C

Los problemas de este tipo se resuelven mediante un *proceso iterativo o de tanteo.*

Hip. 1: 0 °C

La fusión del hielo requiere: $Q = m \cdot L_h = 80\ g \cdot 80 \dfrac{cal}{g} = 6400\ cal$

El enfriamiento del resto del sistema hasta 0 °C requeriría:

$$Q' = k\ (t_c - t_h) + m_a c_a\ (t_a - t_h) + m_{Fe}\ c_{Fe}\ (t_{Fe} - t_h)$$

$$Q' = 101(20-0) + 250 \cdot 1(40-0) + 100 \cdot 0{,}109\,(98-0) = 13.088{,}2\ cal$$

$$Q < Q' \Rightarrow t_{equilibrio} > 0°C$$

Hip. 3: 20 °C

$$Q = m_h\left[L_h + c_a(20-0)\right] = 8000\ cal$$
$$Q' = m_a c_a(40-20) + m_{Fe} c_{Fe}(98-20) = 5850{,}2\ cal$$
$$Q > Q' \Rightarrow t_{equil} < 20°C$$

Hip. 2: (0-20) °C

$$m_h\left[L_h + c_a(t-0)\right] = k(t_c - t) + m_a c_a(t_a - t) + m_{Fe} c_{Fe}(t_{Fe} - t) \Rightarrow t_{equil} = 15°C$$

22. Determínese el valor de, coeficiente adiabático γ para el gas argón, si se necesitan 254 cal para elevar en 2°C la temperatura de 1 kg de esta sustancia a la presión normal y se liberan 486 cal al enfriar argón desde 100 °C hasta 0°C a un volumen constante de 5 l. La presión inicial del argón enfriado es de 10 atm y su masa molecular 40.

Coeficiente adiabático: $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{c_p}{c_v}$; $\quad C_p = M\, c_p$; $C_v = M\, c_v$

Las fórmulas de los procesos de calentamiento y enfriamiento indicados son:

$$Q_1 = m_1 c_p \Delta T_1 \quad ; \quad Q_2 = m_2 c_v \Delta T_2$$

Dividiéndolas resulta:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{m_1}{m_2}\frac{c_p}{c_v}\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{Q_1}{Q_2}\frac{m_2}{m_1}\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}$$

donde: $Q_1 = 254\, cal$; $Q_2 = -486\, cal$, $\Delta T_1 = 2°C$; $\Delta T_2 = -100°C$; $m_1 = 1\, kg$

En la hipótesis de que el argón se comporta como un gas ideal puede utilizarse la *ecuación de estado* de los gases ideales. Aplicándola al estado inicial del segundo sistema:

$$pV = nRT \ ; \ n = \frac{m}{M} \quad \Rightarrow \quad m_2 = \frac{pVM}{RT}$$

$$\gamma = \frac{Q_1}{Q_2}\frac{pVM}{RTm_1}\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} = \frac{254}{-486}\cdot\frac{10\cdot 5\cdot 40}{0{,}082\cdot 373{,}15\cdot 1\cdot 10^3}\cdot\frac{(-100)}{2} = 1{,}7068$$

23. Un herrero ha de colocar una llanta circular de hierro de 1 m de diámetro a una rueda de madera de igual diámetro. Con objeto de poder ajustarla, calienta la llanta hasta conseguir que su radio supere en 2 mm al de la rueda. Sabiendo que la llanta pesa 4 kg, la temperatura ambiente es de 20 °C, el calor específico del hierro 0,11 cal/g.°C y su coeficiente de dilatación lineal $\alpha = 1{,}22\, 10^{-5}\, °C^{-1}$, se pide:

a) Temperatura, en °C, a que debe calentarse la llanta para cumplir las condiciones expuestas.

b) Expresar dicha temperatura en °F y K.

c) Kilocalorías absorbidas por la llanta en el proceso de calentamiento.

a) $\quad d_t = d_{20}\,(1 + \alpha\ \Delta T)$

$$1{,}004 = 1(1 + 1{,}22\cdot 10^{-5}\ \Delta T) \quad \Rightarrow \quad \Delta T = 328\,°C$$

b) $t_F = 32 + \frac{9}{5} t = 32 + \frac{9}{5}\ 348 = 658\,°F$

$T = 273{,}15 + 348 = 621{,}15\,K$

c) $Q = m \cdot c \cdot \Delta T = 400\,g\ \cdot\ 0{,}11 \frac{cal}{g°C} \cdot 328\,°C = 144320\,cal = 144{,}320\,kcal$

24. En un calorímetro (de equivalente en agua k = 10 cal/grado) con 100 g de hielo, ambos a -10 °C, se añaden 200 g de agua a 80 °C. Se pide:
a) Temperatura final de la mezcla.
b) Cantidad de vapor de agua a 100 °C que habría que introducir para que la temperatura final fuera de 90 °C.
(c_{hielo} = 0,5 cal/g.grad ; c_{agua} = 1 cal/g.grad ; L_f = 80 cal/g ; L_v = 540 cal/g)

a) Calor que cedería el agua si tuviera que pasar de 80°C a 0°C:

$$Q'_c = c \cdot m \cdot \Delta T = 1 \cdot 200 \cdot 80 = 16000\,cal$$

Calor que necesitaría absorber el hielo (a –10°C), en el recipiente considerado, para fundirse:

$$Q_{a'} = c_h \cdot m_h \cdot \Delta T + m_h \cdot L_f + k \cdot \Delta T$$

$$Q_{a'} = 0{,}5 \cdot 100 \cdot 10 + 100 \cdot 80 + 10 \cdot 10 = 8600\,cal$$

Por tanto, existe calor suficiente para fundir el hielo; la temperatura t estará comprendida entre 0 y 80 °C.

$$Q_{absorbido} = Q_{cedido}$$

$$Q_{absorbido} = Q_{fusion} + Q_{agua} + Q_{calorímetro}$$

$$8600 + 1 \cdot 100 \cdot t + 10 \cdot t = 1 \cdot 200 \cdot (80 - t)$$

$$310\,t = 7400$$

$$t = 23{,}87\,°C$$

b) El sistema anterior consiste en un calorímetro con 300 g de agua a 23,87 $°C$; el calor necesario para elevar su temperatura hasta los 90 $°C$ es:

$$Q_a = 10 \cdot \Delta T + 1 \cdot 300 \cdot \Delta T = 310\ (90 - 23{,}87) = 20500{,}3\, cal$$

El calor cedido por una masa m de vapor de agua a 100 ºC hasta el equilibrio a 90 ºC sería:

$$Q_{cedido} = L_v \cdot m + c_{agua} \cdot m \cdot \Delta T = 540 \cdot m + 1 \cdot m \cdot 10 = 550 \cdot m$$

$$Q_{cedido} = Q_{absorbido}$$

$$550 \cdot m = 20500{,}3$$

$$m = 37{,}3\, g$$

25. Un trozo de hielo de 200 g a 0 ºC se introduce en 500 g de agua a 20 ºC. El sistema se encuentra en un recinto de capacidad calorífica despreciable y aislado de sus alrededores. Se pide:
a) ¿Cuál es la temperatura final de equilibrio del sistema?
b) ¿Qué cantidad de hielo se funde?
(Calor latente de fusión del hielo: L_f = 80 cal/g)

a) Cantidad de calor que necesitaría absorber el hielo para fundirse en su totalidad:

$$Q_a' = L_f \cdot m = 80 \cdot 20 = 16000 cal$$

Cantidad de calor que podría ceder el agua enfriándose hasta 0ºC. (El recipiente es tal que no aporta calor: $C = c \cdot m \rightarrow 0$):

$$Q_c' = c_a \cdot m_a \cdot \Delta T = 1 \cdot 500\ (20 - 0) = 10000\, cal$$

Dado que $Q_a' > Q_c'$ el hielo no se funde en su totalidad y, por tanto, la temperatura de equilibrio del sistema es 0 ºC.

b)

$$Q_{cedido} = Q_{absorbido}$$

$$10000 = L_f \cdot m = 80 \cdot m$$

$$m = \frac{10000}{80} = 125\, g$$

26. Un calorímetro de aluminio de 200 g contiene 500 g de agua a 20 ºC. Por otra parte, se calientan 300 g de virutas de aluminio a 100 ºC y se depositan en el calorímetro. El calor específico del aluminio es 0'215 cal/g.K. Se pide:
a) Determinar la temperatura final del sistema.
b) Si el calorímetro se utiliza para realizar una "medida exacta" del calor específico del aluminio, ¿Cuál debería ser la temperatura inicial del agua y del recinto para minimizar el error debido al intercambio del calor con los alrededores si la temperatura ambiente es de 20 ºC?

a)

$$Q_{cedido} = Q_{absorbido}$$

$$Q_{cedido} = C_v \cdot m_v \cdot \Delta T = 0{,}215 \cdot 300 \cdot (100 - t)$$

$$Q_{absorbido} = (c_a \cdot m_a + c_c \cdot m_c)\ \Delta T = (1 \cdot 500 + 0{,}215 \cdot 200)(t - 20)$$

$$64{,}5\,(100 - t) = 543\,(t - 20)$$

$$t = 28{,}5°C$$

b) Se considera, en general, que para obtener un error mínimo, la temperatura media entre la inicial y la final del calorímetro debería ser la temperatura ambiente. Sean t_i y t_f, respectivamente .

$$Q_{cedido} = 0{,}215 \cdot 300 \cdot (100 - t_f) = 64{,}5 \cdot (100 - t_f)$$

$$Q_{absorbido} = 543\ (t_f - t_i)$$

$$Q_{absorbido} = Q_{cedido}$$

$$64{,}5\,(100 - t_f) = 543\,(t_f - t_i) \qquad (1)$$

Por otra parte:

$$\frac{t_i + t_f}{2} = t_{amb} = 20°C$$

$$t_f = 40 - t_i \qquad (2)$$

Resolviendo el sistema formado por (1) y (2):

$$t_i = 15{,}5°C$$

5. TRANSMISIÓN DE CALOR

27. Un muro de ladrillo tiene un espesor de e_1 = 42 cm y se le adosa por la parte interior un recubrimiento de madera de espesor 2'6 cm. Las conductividades térmicas respectivas son k_1 = 0'6 kcal/m.°C.h y k_2 = 0'13 kcal/m.°C.h. La superficie externa está al sol y tiene una temperatura de 40 °C. La temperatura interior es de 20 °C. Calcúlese:

a) La temperatura existente en el plano de separación de la madera y el ladrillo.

b) Las calorías que el muro transmite por minuto y m².

a) Suponiendo despreciables los fenómenos de convección y en la hipótesis de **régimen permanente**:

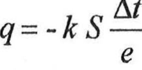
$$t_e - t_m = cte \Rightarrow \phi = cte \Rightarrow \phi_1 = \phi_2$$

siendo:

ϕ_1= flujo de calor que atraviesa el muro/m²

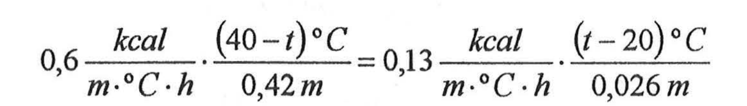
ϕ_2= flujo de calor que atraviesa la madera/m²

Ley de Fourier unidireccional:



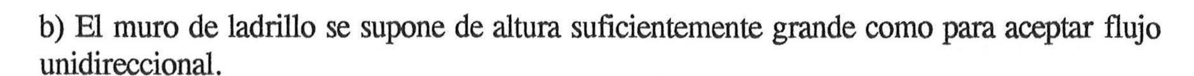
$$q = -k\,S\,\frac{\Delta t}{e}$$

Para 1 m² de muro y de madera:



$$0{,}6\,\frac{kcal}{m\cdot{}^{\circ}C\cdot h}\cdot\frac{(40-t)\,{}^{\circ}C}{0{,}42\,m} = 0{,}13\,\frac{kcal}{m\cdot{}^{\circ}C\cdot h}\cdot\frac{(t-20)\,{}^{\circ}C}{0{,}026\,m}$$

$$0{,}0702t = 1{,}716 \Rightarrow t = 24{,}44^{\circ}C$$



b) El muro de ladrillo se supone de altura suficientemente grande como para aceptar flujo unidireccional.

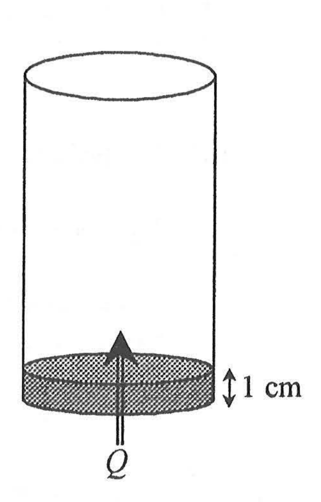
Para 1 m²:

$$\phi = 0{,}6\cdot\frac{40-24{,}4}{0{,}42} = 22{,}23\,\frac{kcal}{h} = \frac{22{,}93}{60}\,\frac{kcal}{h}\cdot\frac{h}{minuto}$$

$$\phi = 0{,}370\,\frac{kcal}{minuto} = 370\,\frac{cal}{minuto}$$

28. 0,5 l de agua a 20 °C llena por completo un cilindro de material aislante, una de cuyas bases es acero de 1 cm de espesor y 10 cm² de sección, y está en contacto con un foco calorífico constante a 80 °C. Calcúlese la temperatura del agua a los 5 minutos de actuar el foco, si la k del acero es de 0,12 cal/°C.cm.s

HIPÓTESIS INICIALES:



* No hay pérdidas de calor a través de las paredes ni de la base superior del cilindro.

* Se admite como calor específico del agua 1 *cal/g.°C,* constante, sin analizar el proceso de transmisión de calor en el agua (convección).

* Régimen permanente mientras dura el proceso.

* Densidad del agua constante, $\rho = 1\ g/cm^3$.

$$m_{agua} = v \cdot \rho = 0{,}5 cm^3 \cdot 1 g/cm^3 = 500 g$$

$$Q = q_y \cdot s \cdot t = -s \cdot t \cdot k\ \frac{\Delta T}{\Delta y} = -10(5 \cdot 60)0{,}12\ \frac{(80-20)}{1} = 21600 cal$$

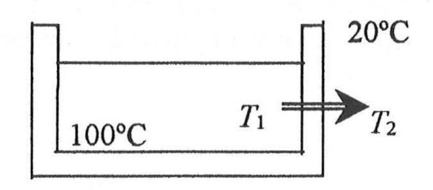
$$Q_{\text{ganado por el agua}} = Q_{\text{que atraviesa la base conductora}}$$

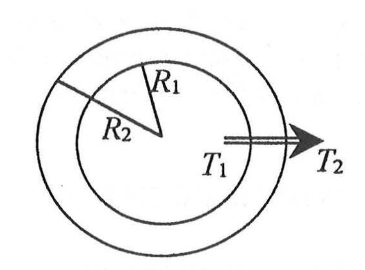
$$21600 = 500 \cdot 1(t-20) \Rightarrow t = 63{,}2\ °C$$

29. Se considera una taza de porcelana de 8 cm de diámetro exterior, 2,5 mm de espesor y de conductividad térmica k = 0'0025 cal/cm.°C.s que contiene agua hirviendo y está situada en un ambiente cuya temperatura es 20 °C.
Calcúlese, estableciendo previamente las hipótesis que se consideren oportunas:
a) Temperatura de la cara externa.
b) Espesor que habrá de tener la taza para que se pudiera tocar sin quemarse los dedos (t < 50 °C)
El coeficiente de convección es h = 0,005 W/cm² °C.

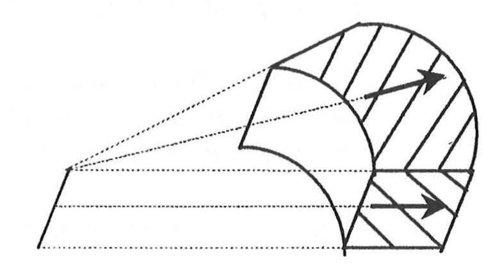
HIPÓTESIS INICIALES:

* Problema de conducción en la pared de la taza (100 °C en la cara interior de la taza y con convección en la exterior)
* Relativas **al medio** sólido: continuo, homogéneo, isótropo, ...
* Relativas al **régimen**: Permanente
* Relativas a la **geometría**: Cilindro hueco (infinito, flujo bidimensional radial)





CONDICIONES DE CONTORNO:



▨ Superficies adiabáticas

* flujo bidimensional
* flujo radial

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0$$

☐ Superficie isoterma : $T = cte = 100\ °C$

Superficie exterior cilíndrica: en contacto con el fluido

Ecuación de recinto : $\Delta T = 0$ **Ec. Laplace**

Ley de Fourier para la taza (sólido): Proceso de conducción: $\vec{q} = -k\ gr\vec{a}d\ T$. La expresión del flujo calorífico a través de las paredes de la taza (cilindro hueco), cuando el flujo es radial, viene dado por la expresión:

$$\phi = 2\pi k\, l \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

Ley de Fourier para el proceso convectivo:

$$\phi = k_f\, S \frac{T_s - T_a}{d} = h\, S\, (T_s - T_a)$$

a) Como el régimen es permanente, el flujo es constante y, por tanto, en un punto cualquiera de la superficie externa de la taza se verifica (Ley de Fourier):

$$\phi = 2\pi k\, l \frac{T_1 - T_e}{\ln \frac{R_e}{R_i}} = h 2\pi R_e\, l\, (T_e - T_2)$$

$$0{,}0025 \frac{cal}{S \cdot cm \cdot {}^{\circ}C} \cdot 2\pi l \cdot \frac{(100-T_e)}{\ln \frac{4}{3{,}75}} \frac{{}^{\circ}C}{cm} = 0{,}005 \cdot 0{,}24 \frac{cal}{J} \frac{W}{cm^2 . {}^{\circ}C} 2\pi l \cdot 4 \, (T_e - 20) \, {}^{\circ}C$$

$$8{,}075 \, (100 - T_e) = T_e - 20 \quad \Rightarrow \quad 827{,}5 = 9{,}075 \, T_e$$

$$\boldsymbol{T_e = 91{,}18 \; {}^{\circ}C}$$

b) $$0{,}0025 \frac{cal}{S \cdot cm \cdot {}^{\circ}C} \cdot 2\pi l \cdot \frac{(100-50)}{\ln \frac{4}{4-e}} \frac{{}^{\circ}C}{cm} = 0{,}005 \cdot 0{,}24 \frac{cal}{J} \frac{W}{cm^2 . {}^{\circ}C} 2\pi l \cdot 4 \, (50 - 20) \, {}^{\circ}C$$

$$\ln \frac{4}{4-e} = \frac{0{,}125}{0{,}144} = 0{,}868 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{4-e} = 2{,}382 \quad \Rightarrow \quad 4 = 9{,}529 - 2{,}382 \, e$$

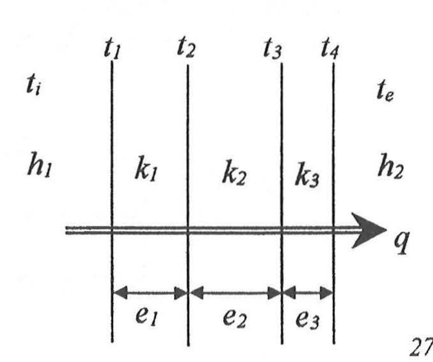
$$e = \frac{5{,}529}{2{,}382} = 2{,}32 \; cm$$

espesor de la taza > 2,32 cm

30. La temperatura del fluido que contiene un horno es t_i = 1280 °C y la del exterior 30 °C. Se desea que el horno pierda q = 800 kcal/m²h y para ello su pared, de espesor e = 0'4 m, se compone de tres partes:
- ***una primera de material refractario k_1 = 1 kcal/m.°C.h***
- ***la segunda de otro material de k_2 = 0'2 kcal/m.°C.h***
- ***otra tercera de fibra de vidrio de k_3 = 0'1 kcal/m.°C.h***

Se conoce la temperatura del plano común a la 2ª y 3ª parte, t_3 = 430°C.
Los coeficientes de transmisión superficial de calor son:
h_1 = 50 kcal/m².°C.h el correspondiente al fluido interior del horno.
h_2 = 10 kcal/m².°C.h el de la pared exterior al ambiente.
Calcúlese:
a) Los espesores de las capas e_1, e_2, e_3.
b) Las temperaturas t_1 de la cara interior del horno, t_2 del plano común a la 1ª y 2ª capas y t_4 de la pared exterior en contacto con el ambiente.

HIPÓTESIS FUNDAMENTAL: se considera la "hipótesis usual" de "muro indefinido" con flujo unidireccional normal al muro y se aplica el principio de conservación de la energía (versión continuidad del flujo en régimen permanente).



$$q=\left(800\frac{kcal}{m^2h}\right)_{(1)}=h_1(t_i-t_1)_{(2)}=k_1\frac{(t_1-t_2)}{e_1}_{(3)}=k_2\frac{(t_2-t_3)}{e_2}_{(4)}=k_3\frac{(t_3-t_4)}{e_3}_{(5)}=h_2(t_4-t_e)$$

$$e_1+e_2+e_{3\,(6)}=0,4\,m$$

$$(1)\quad 800\frac{kcal}{m^2\cdot h}=50\frac{kcal}{m^2\cdot{}^\circ C.h}(1280-t_1)^\circ C\Rightarrow t_1=1264\,^\circ C$$

$$(5)\quad 800\frac{kcal}{m^2\cdot h}=h_2(t_4-t_e)=10(t_4-30)\Rightarrow t_4=110\,^\circ C$$

$$(4)\qquad 800=k_3\frac{t_3-t_4}{e_3}=0,1\frac{430-110}{e_3}\Rightarrow e_3=0,04\,m$$

Resolviendo el sistema de las ecuaciones siguientes:

$$(2)\qquad 800=k_1\cdot\frac{t_1-t_2}{e_1}=1\cdot\frac{1264-t_2}{e_1}$$

$$(3)\qquad 800=k_2\cdot\frac{t_2-t_3}{e_2}=0,2\cdot\frac{t_2-430}{e_2}$$

$$(6)\qquad e_2+e_1=0,4-e_3=0,36$$

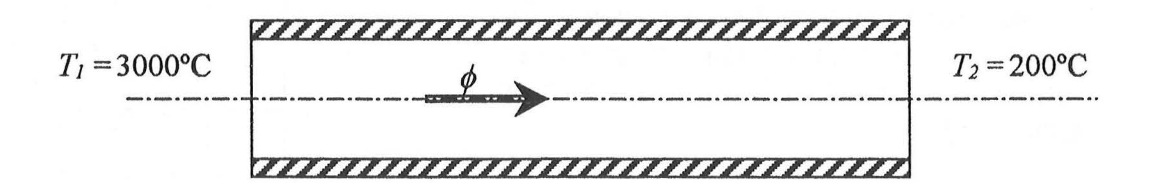
obtenemos:

$$\mathbf{t_2=1112,5\ ^\circ C}$$

$$\mathbf{e_1=18,94\ cm}$$

$$\mathbf{e_2=17,06\ cm}$$

31. En un horno eléctrico se ha introducido un electrodo de carbón de sección circular de 20 cm de diámetro y 1 m de longitud. Uno de sus extremos está a 3000 °C y el otro a 200 °C. La conductividad térmica de ese carbón se estima en 0'1258 cal/cm.s.°C . Calcúlese, explicitando y justificando previamente las hipótesis que se consideren, el flujo de energía a lo largo de él en kcal/h y kW.



HIPÓTESIS INICIALES:

a) Relativas al medio (carbón): Continuo, homogéneo, estable, isótropo.

b) Relativas al régimen: Permanente. $T_1 = 3000\ °C$ y $T_2 = 200\ °C$, ambas constantes.

$T(P)$ no depende de t.

c) Geometría: cilindro.

d) Condiciones de contorno:

Superficie lateral: pared adiabática $\Rightarrow$ $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$

Superficie de las bases: paredes isotermas $\Rightarrow$ $T = cte$

Se prescinde de fenómenos convectivos $\Rightarrow$ flujo unidireccional (axial)

Para el cálculo del flujo utilizamos la ecuación de Fourier de flujo unidireccional:

$$\phi = -k\,S\frac{dT}{dx}$$

$$\phi = 0{,}1258\left(\frac{cal}{cm\cdot s\cdot °C}\right)\pi\cdot 10^2\,(cm^2)\,\frac{3000-200}{100}\left(\frac{°C}{cm}\right)3600\left(\frac{s}{h}\right)$$

$$\phi = 3983{,}7\frac{kcal}{h} = \frac{3983{,}7}{3600}\left(\frac{kcal}{s}\right)\cdot 4{,}18\left(\frac{J}{cal}\right) = 4{,}6255\,kW$$

32. Un panel de material plástico de 0'1 m^2 de área y 0'650 cm de espesor conduce calor en estado estacionario con una potencia (flujo) de 3 watios, siendo las temperaturas de las superficies externas $T_o = 24\ °C$ y $T_1 = 26\ °C$. ¿Cuál es el valor de la conductividad calorífica, expresada en cal/s.°K. cm?

$$\phi = \frac{Q}{t} = 3\frac{J}{s}\cdot 0{,}24\frac{cal}{J} = 0{,}72\frac{cal}{s}$$

$$\phi = k\cdot S\cdot\frac{\Delta T}{e}$$

$$k = \frac{\phi\cdot e}{\Delta T\cdot S} = \frac{0{,}72\cdot 0{,}65}{2\cdot 1000} = 2{,}34\cdot 10^{-4}\ \frac{cal}{s\cdot K\cdot cm}$$

33. En la hipótesis de régimen permanente, calcúlense:
a) Las pérdidas que se producen por unidad de tiempo a través de un cerramiento exterior opaco de 30 m² de superficie formado por las siguientes capas:

nº capa	*Descripción de la capa*	*espesor capa e(m)*	*conductividad capa k (W/m.ºC)*
1	*Ladrillo perforado cara vista*	*0'250*	*0'76*
2	*Poliestireno expandido*	*0'060*	*0'04*
3	*Ladrillo hueco sencillo*	*0'040*	*0'49*
4	*Guarnecido y enlucido de yeso*	*0'025*	*0'30*

b) Las temperaturas en ambas superficies del aislamiento (poliestireno).

Datos complementarios:
Temperatura exterior: -3 ºC
Temperatura interior: 20 ºC
Coef. de convección en la superficie exterior: $h_e = 1/0'06\ W.m^{-2}.{}^{\circ}C^{-1}$
Coef. de convección en la superficie interior $h_i = 1/0'11\ W.m^{-2}.{}^{\circ}C^{-1}$

a) La ecuación global del calorífugo conjunto, en régimen permanente, es:

$$\phi = U\,S(T_i - T_e)$$

donde ϕ es el flujo de calor a través de la superficie S y U es *coeficiente global de transmisión del calor,* expresado por:

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{h_i} + \sum \frac{e_i}{k_i} + \frac{1}{h_e}$$

$$\frac{1}{U} = 0{,}06 + \frac{0{,}25}{0{,}76} + \frac{0{,}6}{0{,}04} + \frac{0{,}04}{0{,}49} + \frac{0{,}025}{0{,}3} + 0{,}11 = 2{,}16\,\frac{m^2.{}^{\circ}C}{W}$$

$$U = 0{,}46\,\frac{W}{m^2\cdot{}^{\circ}C}$$

$$\phi = 0{,}46\cdot 30(20+3) = 317{,}4\,W$$

b) En régimen estacionario el flujo de calor que pasa por cada una de las capas del cerramiento es el mismo.

Designando por t_1, t_2, ..., t_5 las temperaturas de las distintas superficies de las capas que

componen el cerramiento desde el interior al exterior y aplicando las leyes de Fourier y de Newton, se obtiene:

$$t_1 = t_e + \frac{\frac{\phi}{S}}{h_e} = -3 + \frac{1,058}{1,666} \Rightarrow t_1 = -2,36\,°C$$

$$t_2 = t_1 + \frac{\frac{\phi}{S} e_1}{k_1} = -2,36 + \frac{2,645}{0,76} \Rightarrow t_4 = 1,12\,°C$$

$$t_3 = t_2 + \frac{\frac{\phi}{S} e_2}{k_2} = 1,12 + \frac{0,6348}{0,04} \Rightarrow t_3 = 17\,°C$$

34. La caldera de la calefacción está a 20 m del local que se desea calentar. El agua circula entre la caldera y el local por dos tubos cilíndricos de hierro y se quiere evitar las pérdidas en dichos tubos. El agua circula por uno de los tubos a la temperatura de 80 °C, mientras que por el otro la temperatura del agua es de 40 °C, siendo la temperatura ambiente de 0 °C. Determinar:

a) El calor que se pierde cada hora cuando los tubos están descubiertos.

b) El calor que se pierde cada hora, cuando los tubos se recubren con una capa de material aislante de 2 cm de espesor.

Datos complementarios:

Radio interior de los tubos: R_i = 2'8 cm

Radio exterior de los tubos: R_e = 3'0 cm

Conductividad del hierro: k_1=0'15 cal.cm^{-1}.s^{-1}.°C^{-1}.

Conductividad del aislante: k_2= 10^{4} cal.cm^{-1}.s^{-1}.°C^{-1}.

Supóngase que el coeficiente de intercambio por convección entre los fluidos y los materiales es único y de valor h = 1'68.10^{4} cal.cm^{-2}.s^{-1}.°C^{-1}.

a) Hipótesis: régimen permanente $\Rightarrow$ $\phi = cte$

$$\phi = h \cdot 2\pi \cdot l \cdot R_1\,(T_1 - T_i) = k \cdot 2\pi \cdot l \frac{T_i - T_e}{\ln \frac{R_2}{R_1}} = h \cdot 2\pi \cdot R_2 \cdot l\,(T_e - 0)$$

$$\frac{\phi}{2\pi \cdot l} = \frac{T_1 - T_i}{\frac{1}{h R_1}} = \frac{T_i - T_e}{\frac{\ln \frac{R_2}{R_1}}{k}} = \frac{T_e}{\frac{1}{h R_2}}$$

Para el tubo 1:
$$\frac{\phi_1}{2\pi l}=\frac{T_1}{\frac{1}{hR_1}+\frac{ln\frac{R_2}{R_1}}{k}+\frac{1}{hR_2}}=\frac{80}{4110{,}437}=0{,}01946$$

$$\phi_1=0{,}01946\cdot 2\pi\cdot l=244{,}574\,\frac{cal}{s}$$

Análogamente, para el tubo 2: $\frac{\phi_2}{2\pi l}=\frac{40}{4110{,}437}=0{,}00973$

$$\phi_2=0{,}00973\cdot 2\pi\cdot l=122{,}287\,\frac{cal}{s}$$

Por tanto:
$$Q=\phi\cdot t=(244{,}574+122{,}287)(60\cdot 60)=1320701 \text{ cal} = 1320{,}7 \text{ Kcal}$$

b) $R_1 = 2{,}8$ cm ; $R_2 = 3$ cm ; $R_3 = 5$ cm . RÉGIMEN PERMANENTE

$$\phi=h\cdot 2\pi l\cdot R_1(T_1-T_2)=k_h\cdot 2\pi l\cdot\frac{T_2-T_1}{\ln\frac{R_2}{R_1}}=k_a\cdot 2\pi l\cdot\frac{T_3-T_4}{\ln\frac{R_3}{R_2}}=h\cdot 2\pi l\cdot R_3\,T_4$$

$$\frac{\phi}{2\pi l}=\frac{T_1-T_2}{\frac{1}{hR_1}}=\frac{T_2-T_3}{\frac{\ln\frac{R_2}{R_1}}{k_h}}=\frac{T_3-T_4}{\frac{\ln\frac{R_3}{R_2}}{k_a}}=\frac{T_4}{\frac{1}{hR_3}}$$

Para el tubo 1:
$$\frac{\phi_1}{2\pi l}=\frac{T_1}{\frac{1}{hR_1}+\frac{ln\frac{R_2}{R_1}}{k_h}+\frac{ln\frac{R_3}{R_2}}{k_a}+\frac{1}{hR_3}}=\frac{80}{8454{,}07}=0{,}00946\,\frac{cal}{cm^2}$$

$$\phi_1=0{,}00946\cdot 2\pi l=118{,}878\ cal/s$$

Análogamente, para el tubo 2:
$$\frac{\phi_2}{2\pi l}=\frac{40}{8454{,}07}=0{,}0047 \quad\Rightarrow\quad \phi_2=59{,}457\ cal/s$$

$$Q=\phi_T\cdot t=(118{,}878+59{,}457)\,3600=642006{,}1\,cal=642\,kcal$$

35. En verano, una habitación de una vivienda se quiere mantener a 22 °C durante el día en el que se supone una temperatura media exterior de 32 °C. Se admite que la habitación es un recinto de paredes adiabáticas salvo la fachada y que sólo intercambia calor, por tanto, por una única pared y que está compuesta de:
a) placas cerámicas de 5 mm de espesor
b) ladrillos de 20 cm
c) corcho (revestimiento interior) de 3 mm
Se pide:
1. Potencia que tendría que suministrar por m² de fachada un refrigerador instalado en el interior.
2. Si se para el refrigerador ¿cómo podría calcularse la temperatura interior al cabo de 2 horas?
Datos complemetarios:
Conductividades térmicas: del material cerámico, k_{ce} = 11'8 Kcal/h m.°C; del ladrillo, k_l = 0'9 Kcal/h m.°C y del corcho, k_{co} = 0'035 Kcal/h m.°C.
Coeficiente de transmisión superficial del calor (supuesto idéntico en ambos paramentos): h = 20 Kcal/m² h.°C

1. Transmisión del calor en **régimen permanente:** $\vec{q} = -U \, gr\vec{a}d \; T$

El coeficiente global de transmisión del calor, U, considerando que se producen los fenómenos de conducción y de convección es:

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{h_e} + \frac{e_1}{k_1} + \frac{e_2}{k_2} + \frac{e_3}{k_3} + \frac{1}{h_i} = \frac{2}{20} + \frac{0{,}005}{1{,}18} + \frac{0{,}2}{0{,}9} + \frac{0{,}003}{0{,}035}$$

$$\frac{1}{U} = 0{,}1 + 4{,}237 \cdot 10^{-4} + 0{,}222 + 0{,}0857 = 0{,}408 \frac{h.m^2.°C}{kcal}$$

$$U = 2{,}449 \frac{kcal}{h.m^2.°C}$$

Para cada m² de superficie de pared:

$$Pot = \frac{Q}{t} = K \cdot S \cdot \Delta T = 2{,}499 \cdot 1 \cdot (305 - 295) = 24{,}99 \; \frac{kcal}{h}$$

2. T_i variable, T_e cte, K cte $\Rightarrow$ **Régimen variable** de transmisión del calor

$$\frac{dQ}{dT} = K \, S(T_e - T_i) \quad \text{y como} \quad dQ = m \, c \, dT = C \, dT$$

$$\frac{C\,dT}{dt} = K\,S\,(T_e - T)$$

Separando variables: $$\frac{dT}{T_e - T} = \frac{K\,S}{C}\,dt$$

Integrando: $$ln\,(T_e - T) - ln\,A = -\frac{K\,S}{C}\,t \quad \Rightarrow \quad T_e - T = A\,e^{-\frac{KS}{C}t}$$

Para el cálculo del valor de la constante de integración A se impone la condición:

$$t = 0 \;\Rightarrow\; T_i = T_o \;\Rightarrow\; T_e - T_o = A$$

$$T_2 = 305 - (305 - 295)\,e^{\frac{-2{,}449\cdot 1}{C}\cdot 2} = 305 - 10^{\frac{-4{,}9}{C}}$$

Por tanto, la ecuación del campo térmico es:

$$T = T_e - (T_e - T_0)\;e^{-\frac{KS}{C}t}$$

36. La cubierta de 500 m² de un recinto para exposiciones debe tener el 12 % de su superficie formado por claraboyas o lucernarios que permitan la iluminación natural del espacio interior. Si la parte opaca tiene un coeficiente global de transmisión del calor de 0'76 kcal/h m².°C, la translúcida de 2,08 kcal/h m².°C y la temperatura interior se debe mantener a 18°C, siendo la temperatura en el exterior de -3°C, se pide:
a) La cantidad de calor que se pierde por conducción-convección a través de la cubierta, en una hora.
b) Si fuera necesario aumentar la superficie translúcida hasta el 20 % de la superficie cubierta, para mejorar la iluminación interior, ¿qué coeficiente global de transmisión de calor deberá tener el nuevo material opaco para mantener igual las pérdidas?.

a) 500 m^2 : 440 m^2 opacos y 60 m^2 translúcidos;

$$\phi_{total} = \phi_{op.} + \phi_{trans.} = U_o\,S_o\,\Delta t + U_t\,S_t\,\Delta t = 440\cdot 0{,}76\cdot 21 + 60\cdot 2{,}08\cdot 21 = 9{,}6436\,\frac{kcal}{h}$$

b) 400 m² opacos y 100 m² translúcidos $\Delta t = 21$ °C

$$9{,}6432 = \phi_{opacos} + \phi_{trans.} = U_o\cdot 400\cdot 21 + 2{,}08\cdot 100\cdot 21 = U_o\cdot 400\cdot 21 + 4368$$

$$U_0 = \frac{5{,}2752}{400\cdot 21} = 0{,}628\,\frac{kcal}{h\cdot m^2\cdot °C}$$

37. En un día de invierno las pérdidas de calor por convección-conducción a través de los cerramientos verticales de un edificio industrial son del orden de 10.000 kcal/h. Si el área total de estos cerramientos es de 500 m², de los cuales 100 m² son de material translúcido cuyo coeficiente global de transmisión del calor es de 2'08 kcal/h.°C m², y si la diferencia de temperaturas entre el exterior y el interior es de 20°C, se pide:
a) ¿Cuál es el coeficiente global de transmisión de calor de las superficies opacas?
b) Si se reduce el área de las superficies translúcidas a 80 m² ¿de qué orden deberá ser el coeficiente de transmisión global de calor aire-aire del material opaco para que las pérdidas de calor se reduzcan a la mitad?

$$\phi_{total} = \phi_{opacas} + \phi_{translucidas}$$

a)

$$10000 = U_0 \cdot S_0 \cdot \Delta T + U_t \cdot S_t \cdot \Delta T$$

$$\phi_{total} = 10000 = U_0 \cdot 400 \cdot 20 + 2{,}08 \cdot 100 \cdot 20 = 8000\, U_0 + 4160$$

$$U_0 = \frac{10000 - 4160}{8000} = \frac{5840}{8000} = 0{,}73 \frac{kcal}{h \cdot m^2 \cdot {}^\circ C}$$

b) $S_{translúcidas} = 80\ m^2$

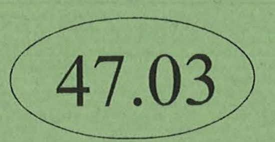
$S_{opacas} = 500 - 80 = 420\ m^2$

$$\phi_{total} = 5000 = U_{0'} \cdot 420 \cdot 20 + 2{,}08 \cdot 80 \cdot 20$$

$$U_{0'} = \frac{5000 - 3328}{8400} = \frac{1672}{8400} = 0{,}199 \frac{kcal}{h \cdot m^2 \cdot {}^o C}$$

NOTAS

CUADERNO



CATÁLOGO Y PEDIDOS EN

http://www.aq.upm.es/of/jherrera

info@mairea-libros.com

